УДК 517.9

І.В. Бецко
Національний технічний університет України “КПІ”, Київ, Україна

ДОСЛІДЖЕННЯ СТРУКТУРИ МНОЖИНИ НЕПЕРЕРВНИХ РОЗВ’ЯЗКІВ СИСТЕМ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

Background. We consider the structure of a set of continuous solutions of equations systems

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)x(qt) + F(t) \tag{1}$$

in a number of cases depending on the hypotheses for the matrices A, B, number q and their properties.

Objective. To study existence of continuous limited solutions for $t \in \mathbb{R}$, study the structure of their set and also developing the method of their construction.

Methods. We use methods of the theory of differential and difference equations.

Results. The existence of the family of continuous limited solutions for $t \geq 0$ which depends on $\bar{n} = \sum_{i=1}^{k} n_i$ arbitrary continuous one-periodic functions at some conditions is proved in theorem 1. Similar theorem is proved for case $t \leq 0$ (the theorem 2), and is proved the theorem 3 about the existence of the continuous limited solution of homogeneous system of the equation (1) is also proved.

Conclusions. New conditions for the existence of continuous solutions of difference equations systems (1) are established, we proposed the method of constructing these solutions and investigated the structure of their set.

Keywords: difference equations; continuous limited solutions.

Вступ

Робота присвячена дослідженню структури множини неперервних розв’язків системи різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)x(qt) + F(t), \tag{1}$$

де $t \in \mathbb{R}$, $A(t)$, $B(t)$ — дійсні $(n \times n)$-матриці, $F(t)$ — дійсний вектор розмірності n, q — деяка дійсна стала. За різних припущень відносно матриць $A(t)$, $B(t)$ і вектора $F(t)$ окремі класи таких систем рівнянь були основним об’єктом дослідження багатьох математиків [1—5], і на сьогодні низку питань їх теорії досить детально вивчено. Особливо це стосується існування різного роду (аналітичних, неперервних тощо) розв’язків і дослідження їх властивостей. У роботі продовжується дослідження аналогічних питань для системи рівнянь (1). Зокрема, за деяких припущень встановимо існування неперервних розв’язків таких систем і розробимо метод їх побудови.

Постановка задачі

Метою роботи є вивчення питань існування неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}$ розв’язків, дослідження структури їх множини, а також розроблення методу їх побудови.

Основні результати

Розглянемо систему рівнянь вигляду

$$x(t+1) = Ax(t) + Bx(qt), \tag{2}$$

де A, B — дійсні сталі $(n \times n)$-матриці, q — дійсна стала, і покажемо, що вона має неперервні розв’язки. При цьому відносно матриці A будемо припускати, що її власні значення λ_i, $i = 1, \ldots, n$, задовольняють умови

$$|\lambda_i| \neq 0, 1, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Тоді існує заміна змінних

$$x(t) = Cy(t),$$

де C — деяка неособлива $(n \times n)$-матриця, яка приводить систему рівнянь (2) до вигляду

$$y(t+1) = Jy(t) + \tilde{B}y(qt), \tag{3}$$

де $\tilde{B} = C^{-1}BC$, $J = \mathrm{diag}(J_1(\lambda_1), \ldots, J_m(\lambda_m))$,

$$J_i(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & \varepsilon & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \varepsilon & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_i & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix},$$

$$i = 1,\dots,m,\ m \le n,\ \varepsilon << 1.$$

Залежно від умов, які задовольняють числа λ_i, $i = 1,\dots,m$, матриця $\tilde{B}$ і стала q, далі розглянемо ряд випадків, коли вдається не тільки дати відповідь на запитання про існування неперервних розв'язків системи рівнянь (3), але й побудувати їх у вигляді деяких функціональних рядів.

Розглянемо систему різницевих рівнянь (3) за таких припущень:

1) $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j,\ i = \overline{1,k},\ j = \overline{k+1,m},\ 0 \le m \le n,\ q > 1$;

2) $\lambda_* > \hat{\lambda}^q,\ \lambda^* < \hat{\lambda} < 1,\ \Delta = \max\left\{ \dfrac{\tilde{b}_1(\lambda_*^{-1} + \delta_1)}{1 - (\lambda_*^{-1} + \delta_1)\hat{\lambda}^q}, \dfrac{\tilde{b}_2(\lambda_{**}^{-1} + \delta_2)}{1 - (\lambda_{**}^{-1} + \delta_2)\hat{\lambda}^q} \right\} < 1$, де $\delta_i = \delta_i(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$,

$\tilde{b}_1 = |\tilde{B}_{11}| + |\tilde{B}_{12}|,\ \tilde{b}_2 = |\tilde{B}_{21}| + |\tilde{B}_{22}|,\ \lambda_* = \min\{\lambda_i,\ i = 1,\dots,k\},\ \lambda^* = \max\{\lambda_i,\ i = 1,\dots,k\},\ \lambda_{**} = \min\{\lambda_j,\ j = k+1,\dots,m\},\ \lambda^{**} = \max\{\lambda_j,\ j = k+1,\dots,m\}$.

Ввівши позначення

$$J_1 = \mathrm{diag}(J_1(\lambda_1),\dots,J_k(\lambda_k)),$$

$$J_2 = \mathrm{diag}(J_{k+1}(\lambda_{k+1}),\dots,J_m(\lambda_m)),$$

$$\begin{gathered} y(t) = (y^1(t), y^2(t)),\ y^1(t) = (y_1(t),\dots,y_k(t)), \\ y^2(t) = (y_{k+1}(t),\dots,y_m(t)), \end{gathered} \tag{4}$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} \\ \tilde{B}_{21} & \tilde{B}_{22} \end{pmatrix},$$

систему рівнянь (3) запишемо у вигляді

$$\begin{gathered} y^1(t+1) = J_1 y^1(t) + \tilde{B}_{11} y^1(qt) + \tilde{B}_{12} y^2(qt), \\ y^2(t+1) = J_2 y^2(t) + \tilde{B}_{21} y^1(qt) + \tilde{B}_{22} y^2(qt), \end{gathered} \tag{5}$$

Доведемо таку теорему.

Теорема 1. Нехай виконуються умови 1, 2. Тоді система рівнянь (3) має сім'ю неперервних обмежених при $t \ge 0$ розв'язків, яка залежить від $\bar{n} = \sum_{i=1}^{k} n_i$ довільних неперервних 1-періодичних функцій.

Доведення. Покажемо, що система рівнянь (5) має розв'язки у вигляді рядів

$$\begin{gathered} y^1(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t), \\ y^2(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t), \end{gathered} \tag{6}$$

де $y_i^1(t), y_i^2(t), i = 0,1,\dots,$ – деякі неперервні й обмежені при $t \in \mathbb{R}^+$ вектор-функції. Дійсно, підставляючи (6) в (5), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t+1) = $$
$$= J_1 \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t) + \tilde{B}_{11} \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(qt) + \tilde{B}_{12} \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(qt),$$
$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t+1) = $$
$$= J_2 \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t) + \tilde{B}_{21} \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(qt) + \tilde{B}_{22} \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(qt).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $y_i^1(t), y_i^2(t), i = 0,1,\dots,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$\begin{gathered} y_0^1(t+1) = J_1 y_0^1(t), \\ y_0^2(t+1) = J_1 y_0^2(t), \end{gathered} \tag{7_0}$$

$$\begin{gathered} y_i^1(t+1) = J_1 y_i^1(t) + \tilde{B}_{11} y_{i-1}^1(qt) + \tilde{B}_{12} y_{i-1}^2(qt), \\ y_i^2(t+1) = J_2 y_i^2(t) + \tilde{B}_{21} y_{i-1}^1(qt) + \tilde{B}_{22} y_{i-1}^2(qt), \\ i = 1,2,\dots, \end{gathered} \tag{7_i}$$

то ряди (6) є формальним розв'язком системи рівнянь (5).

Дійсно, система рівнянь (7_0) має сім'ю неперервних обмежених при $t \ge 0$ розв'язків $(y_0^1(t), 0)$, яка залежить від $\bar{n} = \sum_{i=1}^{k} n_i$ довільних неперервних 1-періодичних функцій.

Тоді безпосередньою підстановкою в (7_i), $i = 1,2,\dots,$ можна переконатися, що ряди

$$\begin{gathered} y_i^1(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} J_1^{-(j+1)} [\tilde{B}_{11} y_{i-1}^1(q(t+j)) + \\ + \tilde{B}_{12} y_{i-1}^2(q(t+j))], \\ y_i^2(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} J_2^{-(j+1)} [\tilde{B}_{21} y_{i-1}^1(q(t+j)) + \\ + \tilde{B}_{22} y_{i-1}^2(q(t+j))], \\ i = 1,2,\dots, \end{gathered} \tag{8_i}$$

є формальними розв'язками послідовності систем рівнянь (7_i), $i = 1, 2, \ldots$.

Покажемо, що ряди (8_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, які задовольняють оцінки

$$|y_i^1(t)| \le \tilde{M}\Delta^i \hat{\lambda}^{qt}, \; i = 0, 1, \ldots,$$
$$|y_i^2(t)| \le \tilde{M}\Delta^i \hat{\lambda}^{qt}, \; i = 0, 1, \ldots, \qquad (9)$$

де $\tilde{M}$ – деяка додатна стала.

Справді, оскільки $|y_0^1(t)| \le \tilde{M}\hat{\lambda}^t$ (випливає із представлення загального розв'язку системи (7_0)), де $\tilde{M} = \max_t |\hat{\omega}(t)|$, то з огляду на (8_1) отримуємо

$$|y_1^1(t)| \le$$
$$\le \sum_{j=0}^{\infty} |J_1^{-1}|^{j+1} |\tilde{B}_{11} y_0^1(q(t+j)) + \tilde{B}_{12} y_0^2(q(t+j))| \le$$
$$\le \sum_{j=0}^{\infty} |J_1^{-1}|^{j+1} |\tilde{B}_{11} y_0^1(q(t+j))| \le$$
$$\le \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_*^{-1} + \delta_1)^{j+1} \tilde{b}_1 \tilde{M} \hat{\lambda}^{q(t+j)} \le$$
$$\le \tilde{M}\tilde{b}_1(\lambda_*^{-1} + \delta_1)\hat{\lambda}^{qt} \sum_{j=0}^{\infty} ((\lambda_*^{-1} + \delta_1)\hat{\lambda}^q)^j \le$$
$$\le \tilde{M} \frac{\tilde{b}_1(\lambda_*^{-1} + \delta_1)}{1 - (\lambda_*^{-1} + \delta_1)\hat{\lambda}^q} \hat{\lambda}^{qt} \le \tilde{M}\Delta\hat{\lambda}^{qt};$$

$$|y_1^2(t)| \le$$
$$\le \sum_{j=0}^{\infty} |J_2^{-1}|^{j+1} |\tilde{B}_{21} y_0^1(q(t+j)) + \tilde{B}_{22} y_0^2(q(t+j))| \le$$
$$\le \sum_{j=0}^{\infty} |J_2^{-1}|^{j+1} |\hat{B}_{21} y_0^1(q(t+j))| \le$$
$$\le \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_{**}^{-1} + \delta_2)^{j+1} \tilde{b}_2 \tilde{M} \hat{\lambda}^{q(t+j)} \le$$
$$\le \tilde{M}\tilde{b}_2(\lambda_{**}^{-1} + \delta_2)\hat{\lambda}^{qt} \sum_{j=0}^{\infty} ((\lambda_{**}^{-1} + \delta_2)\hat{\lambda}^q)^j \le$$
$$\le \tilde{M} \frac{\tilde{b}_2(\lambda_{**}^{-1} + \delta_2)}{1 - (\lambda_{**}^{-1} + \delta_2)\hat{\lambda}^q} \hat{\lambda}^{qt} \le \tilde{M}\Delta\hat{\lambda}^{qt}.$$

Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінки (9) доведено для деякого $i > 1$, і покажемо, що вони не зміняться при переході від i до $i+1$. Згідно з (8_{i+1}) і (9) одержуємо

$$|y_{i+1}^1(t)| \le$$
$$\le \sum_{j=0}^{\infty} |J_1^{-1}|^{j+1} |\tilde{B}_{11} y_i^1(q(t+j)) + \tilde{B}_{12} y_i^2(q(t+j))| \le$$
$$\le \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_*^{-1} + \delta_1)^{j+1} \tilde{b}_1 \tilde{M}\Delta^i \hat{\lambda}^{q(q(t+j))} \le$$
$$\le \tilde{M}\Delta^i \tilde{b}_1(\lambda_*^{-1} + \delta_1)\hat{\lambda}^{q^2 t} \sum_{j=0}^{\infty} ((\lambda_*^{-1} + \delta_1)\hat{\lambda}^{q^2})^j \le$$
$$\le \tilde{M}\Delta^i \tilde{b}_1(\lambda_*^{-1} + \delta_1)\hat{\lambda}^{qt} \sum_{j=0}^{\infty} ((\lambda_*^{-1} + \delta_1)\hat{\lambda}^q)^j \le$$
$$\le \tilde{M}\Delta^i \frac{\tilde{b}_1(\lambda_*^{-1} + \delta_1)}{1 - (\lambda_*^{-1} + \delta_1)\hat{\lambda}^q} \hat{\lambda}^{qt} \le \tilde{M}\Delta^{i+1}\hat{\lambda}^{qt},$$

$$|y_{i+1}^2(t)| \le$$
$$\le \sum_{j=0}^{\infty} |J_2^{-1}|^{j+1} |\tilde{B}_{21} y_i^1(q(t+j)) + \tilde{B}_{22} y_i^2(q(t+j))| \le$$
$$\le \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_{**}^{-1} + \delta_2)^{j+1} \tilde{b}_2 \tilde{M}\Delta^i \hat{\lambda}^{q(q(t+j))} \le$$
$$\le \tilde{M}\Delta^i \tilde{b}_2(\lambda_{**}^{-1} + \delta_2)\hat{\lambda}^{q^2 t} \sum_{j=0}^{\infty} ((\lambda_{**}^{-1} + \delta_2)\hat{\lambda}^{q^2})^j \le$$
$$\le \tilde{M}\Delta^i \tilde{b}_2(\lambda_{**}^{-1} + \delta_2)\hat{\lambda}^{qt} \sum_{j=0}^{\infty} ((\lambda_{**}^{-1} + \delta_2)\hat{\lambda}^q)^j \le$$
$$\le \tilde{M}\Delta^i \frac{\tilde{b}_2(\lambda_{**}^{-1} + \delta_2)}{1 - (\lambda_{**}^{-1} + \delta_2)\hat{\lambda}^q} \hat{\lambda}^{qt} \le \tilde{M}\Delta^{i+1}\hat{\lambda}^{qt},$$

звідки випливають оцінки (9) при $i+1$. Цим ми довели, що ряди (8_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються при $t \ge 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t) = (y_i^1(t), y_i^2(t))$, $i = 1, 2, \ldots$, які задовольняють оцінки (9). Звідси безпосередньо випливає, що ряди (6) рівномірно збігаються при $t \ge 0$ до деякої неперервної вектор-функції $y(t) = (y^1(t), y^2(t))$, яка є розв'язком системи (5) і задовольняє умову

$$|y(t)| \le \frac{M}{1-\Delta}\hat{\lambda}^{qt}.$$

Теорему 1 доведено.

Дослідимо тепер питання про існування неперервних при $t \le 0$ розв'язків системи різницевих рівнянь (3) у випадку, коли виконуються умови:

1) $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j,\ i = \overline{1,k},\ j = \overline{k+1,m},\ 0 \le m \le n,$ $q > 1;$

2) $\lambda^{**} < \bar{\lambda}^q, 1 < \bar{\lambda} < \lambda_{**}, \bar{\Delta} = \max\left\{ \dfrac{\bar{b}_1 \bar{\lambda}^{-q}}{1 - (\lambda^* + \delta_3)\bar{\lambda}^{-q}}, \dfrac{\bar{b}_2 \bar{\lambda}^{-q}}{1 - (\lambda^{**} + \delta_4)\bar{\lambda}^{-q}} \right\} < 1,$ де $\bar{b}_1 = |\tilde{B}_{11}| + |\tilde{B}_{12}|, \bar{b}_2 = |\tilde{B}_{21}| + |\tilde{B}_{22}|,\ \lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1,\ldots,k\},\ \lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1,\ldots,k\},\ \lambda_{**} = \min\{\lambda_j, j = k+1,\ldots,m\},$ $\lambda^{**} = \max\{\lambda_j,\ j = k+1,\ldots,m\}.$

Має місце така теорема.

Теорема 2. Нехай виконуються умови 1, 2. Тоді система рівнянь (3) має сім'ю неперервних, обмежених при $t \le 0$ розв'язків, які залежать від $\bar{\bar{n}} = \sum_{i=k+1}^{m} n_i$ довільних неперервних 1-періодичних функцій $\omega_j(t),\ j = \overline{k+1,m}.$

Д о в е д е н н я. Покажемо, що система рівнянь (3) має розв'язки у вигляді рядів (6). Дійсно, якщо вектор-функції $y_i(t) = (y_i^1(t), y_i^2(t))$, $i = 0,1,\ldots,$ є розв'язками систем рівнянь (7_i), $i = 0,1,\ldots,$ то ряд (6) буде формальним розв'язком системи рівнянь (3).

Система рівнянь (7_0) має сім'ю неперервних і обмежених при $t \le 0$ розв'язків $(0, y_0^2(t))$, яка залежить від $\bar{\bar{n}} = \sum_{i=k+1}^{m} n_i$ довільних неперервних 1-періодичних функцій.

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (7_i), $i = 1,2,\ldots,$ доведемо, що вони також мають неперервні при $t \le 0$ розв'язки. Дійсно, оскільки ряди

$$\begin{gathered} y_i^1(t) = \\ = \sum_{j=1}^{\infty} J_1^{j-1}[\tilde{B}_{11} y_{i-1}^1(q(t-j)) + \tilde{B}_{12} y_{i-1}^2(q(t-j))], \\ y_i^2(t) = \\ = \sum_{j=1}^{\infty} J_2^{j-1}[\tilde{B}_{21} y_{i-1}^1(q(t-j)) + \tilde{B}_{22} y_{i-1}^2(q(t-j))], \\ i = 1,2,\ldots, \end{gathered} \tag{10_i}$$

є формальними розв'язками відповідних систем рівнянь (7_i), $i = 1,2,\ldots,$ то достатньо показати, що ці ряди рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t) = (y_i^1(t), y_i^2(t)),\ i = 1,2,\ldots.$ Для цього достатньо показати, що при всіх $t \ge 1$ виконуються оцінки

$$\begin{gathered} |y_i^1(t)| \le \bar{M}\bar{\Delta}^i \bar{\lambda}^{qt}, \\ |y_i^2(t)| \le \bar{M}\bar{\Delta}^i \bar{\lambda}^{qt}, \end{gathered} \tag{11}$$

де $\bar{M} = \max_t |\varpi(t)|$. Справді, оскільки $|y_i^2(t)| \le \le \bar{M}\bar{\lambda}^t$, то внаслідок ($10_1$) отримуємо

$$\begin{gathered} |y_1^1(t)| \le \\ \le \sum_{j=1}^{\infty} |J_1|^{j-1} |\tilde{B}_{11} y_0^1(q(t-j)) + \tilde{B}_{12} y_0^2(q(t-j))| \le \\ \le \sum_{j=1}^{\infty} |J_1|^{j-1} |\tilde{B}_{12} y_0^2(q(t-j))| \le \\ \le \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda^* + \delta_3)^{j-1} \bar{b}_1 \bar{M} \bar{\lambda}^{q(t-j)} \le \\ \le \bar{b}_1 \bar{M} (\lambda^* + \delta_3)^{-1} \bar{\lambda}^{qt} \sum_{j=1}^{\infty} ((\lambda^* + \delta_3)\bar{\lambda}^{-q})^j \le \\ \le \bar{M} \frac{\bar{b}_1 (\lambda^* + \delta_3)^{-1} (\lambda^* + \delta_3)\bar{\lambda}^{-q}}{1 - (\lambda^* + \delta_3)\bar{\lambda}^{-q}} \bar{\lambda}^{qt} \le \\ \le \bar{M} \frac{\bar{b}_1 \bar{\lambda}^{-q}}{1 - (\lambda^* + \delta_3)\bar{\lambda}^{-q}} \bar{\lambda}^{-qt} \le \bar{M}\bar{\Delta}\bar{\lambda}^{qt}, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} |y_1^2(t)| \le \\ \le \sum_{j=1}^{\infty} |J_2|^{j-1} |\tilde{B}_{21} y_0^1(q(t-j)) + \tilde{B}_{22} y_0^2(q(t-j))| \le \\ \le \sum_{j=1}^{\infty} |J_2|^{j-1} |\tilde{B}_{22} y_0^2(q(t-j))| \le \\ \le \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda^{**} + \delta_4)^{j-1} \bar{b}_2 \bar{M} \bar{\lambda}^{q(t-j)} \le \\ \le \bar{b}_2 \bar{M} (\lambda^{**} + \delta_4)^{-1} \bar{\lambda}^{qt} \sum_{j=1}^{\infty} ((\lambda^{**} + \delta_4)\bar{\lambda}^{-q})^j \le \\ \le \bar{M} \frac{\bar{b}_2 (\lambda^{**} + \delta_4)^{-1} (\lambda^{**} + \delta_4)\bar{\lambda}^{-q}}{1 - (\lambda^{**} + \delta_4)\bar{\lambda}^{-q}} \bar{\lambda}^{qt} \le \end{gathered}$$

$$\leq \bar{M}\,\frac{\bar{b}_2\bar{\lambda}^{-q}}{1-(\lambda^{**}+\delta_4)\bar{\lambda}^{-q}}\bar{\lambda}^{qt} \leq \bar{M}\bar{\Delta}\bar{\lambda}^{qt}.$$

Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінки (11) доведені для деякого $i \geq 1$, і покажемо, що вони не зміняться при переході від i до $i+1$. Згідно з (10_{i+1}), (11) отримуємо

$$|y_{i+1}^1(t)| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty}|J_1|^{j-1}|\tilde{B}_{11}\,y_i^1(q(t-j)) + \tilde{B}_{12}\,y_i^2(q(t-j))| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty}(\lambda^*+\delta_3)^{j-1}\bar{b}_1\bar{M}\bar{\Delta}^i\bar{\lambda}^{q(q(t-j))} \leq$$

$$\leq \bar{b}_1\bar{M}\bar{\Delta}^i(\lambda^*+\delta_3)^{-1}\bar{\lambda}^{q^2t}\sum_{j=1}^{\infty}((\lambda^*+\delta_3)\bar{\lambda}^{-q^2})^j \leq$$

$$\leq \bar{b}_1\bar{M}\bar{\Delta}^i(\lambda^*+\delta_3)^{-1}\bar{\lambda}^{qt}\sum_{j=1}^{\infty}((\lambda^*+\delta_3)\bar{\lambda}^{-q})^j \leq$$

$$\leq \bar{M}\bar{\Delta}^i\,\frac{\bar{b}_1\bar{\lambda}^{-q}}{1-(\lambda^*+\delta_3)\bar{\lambda}^{-q}}\bar{\lambda}^{qt} \leq \bar{M}\bar{\Delta}^{i+1}\bar{\lambda}^{qt},$$

$$|y_{i+1}^2(t)| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty}|J_2|^{j-1}|\tilde{B}_{21}\,y_i^1(q(t-j)) + \tilde{B}_{22}\,y_i^2(q(t-j))| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty}(\lambda^{**}+\delta_4)^{j-1}\bar{b}_2\bar{M}\bar{\Delta}^i\bar{\lambda}^{q(q(t-j))} \leq$$

$$\leq \bar{b}_2\bar{M}\bar{\Delta}^i(\lambda^{**}+\delta_4)^{-1}\bar{\lambda}^{q^2t}\sum_{j=1}^{\infty}((\lambda^{**}+\delta_4)\bar{\lambda}^{-q^2})^j \leq$$

$$\leq \bar{b}_2\bar{M}\bar{\Delta}^i(\lambda^{**}+\delta_4)^{-1}\bar{\lambda}^{qt}\sum_{j=1}^{\infty}((\lambda^{**}+\delta_4)\bar{\lambda}^{-q})^j \leq$$

$$\leq \bar{M}\bar{\Delta}^i\,\frac{\bar{b}_2\bar{\lambda}^{-q}}{1-(\lambda^{**}+\delta_4)\bar{\lambda}^{-q}}\bar{\lambda}^{qt} \leq \bar{M}\bar{\Delta}^{i+1}\bar{\lambda}^{qt},$$

звідки випливають оцінки (11) при $i+1$.

Отже, ми довели, що ряди (10_i), $i = 1,2,\ldots$, рівномірно збігаються при $t \leq 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t) = (y_i^1(t), y_i^2(t))$, $i = 1,2,\ldots$, які задовольняють оцінки (11). Цим ми довели, що ряд (6) збігається при $t \leq 0$ до деякої неперервної вектор-функції $y(t) = (y^1(t), y^2(t))$, яка є розв'язком системи (3) і задовольняє умову

$$|y(t)| \leq \frac{\bar{M}}{1-\bar{\Delta}}\bar{\lambda}^{qt}.$$

Теорему 2 доведено.

Розглянемо тепер систему неоднорідних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} y^1(t+1) &= J_1 y^1(t) + \\ &+ \tilde{B}_{11}\,y^1(qt) + \tilde{B}_{12}\,y^2(qt) + F^1(t), \\ y^2(t+1) &= J_2 y^2(t) + \tilde{B}_{21}\,y^1(qt) + \\ &+ \tilde{B}_{22}\,y^2(qt) + F^2(t). \end{aligned} \tag{12}$$

Теорема 3. Нехай виконуються умови:

1) $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j$, $i = 1,\ldots,k$, $j = k+1,\ldots,m$, $q > 0$;

2) $\theta = \max\left\{\dfrac{\tilde{b}_1}{1-(\lambda^*+\delta_5)}, \dfrac{\tilde{b}_2(\lambda_{**}^{-1}+\delta_6)}{1-(\lambda_{**}^{-1}+\delta_6)}\right\} < 1$,

$\tilde{b}_1 = |\tilde{B}_{11}| + |\tilde{B}_{12}|$, $\tilde{b}_2 = |\tilde{B}_{21}| + |\tilde{B}_{22}|$, $\lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1,\ldots,k\}$, $\lambda_{**} = \min\{\lambda_j, j = k+1,\ldots,m\}$;

3) всі компоненти вектор-функції $F(t)$ є неперервними й обмеженими при всіх $t \in \mathbb{R}$ функціями.

Тоді система рівнянь (12) має неперервний і обмежений при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок $y(t) = (y^1(t), y^2(t))$.

Д о в е д е н н я. Розв'язок системи (12) шукатимемо у вигляді функціональних рядів

$$\begin{aligned} y^1(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t), \\ y^2(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t), \end{aligned} \tag{13}$$

де $y_i^1(t), y_i^2(t)$, $i = 0,1,\ldots,$ — деякі неперервні й обмежені при $t \in \mathbb{R}$ вектор-функції. Дійсно, підставляючи (13) у (12), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t+1) = J_1\sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t) + \tilde{B}_{11}\sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(qt) +$$
$$+ \tilde{B}_{12}\sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(qt) + F^1(t),$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t+1) = J_2\sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t) + \tilde{B}_{21}\sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(qt) +$$
$$+ \tilde{B}_{22}\sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(qt) + F^2(t).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $y_i^1(t), y_i^2(t)$, $i = 0,1,\ldots$, є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$\begin{aligned} y_0^1(t+1) &= J_1 y_0^1(t) + F^1(t), \\ y_0^2(t+1) &= J_2 y_0^2(t) + F^2(t), \end{aligned} \qquad (14_0)$$

$$\begin{aligned} y_i^1(t+1) &= J_1 y_i^1(t) + \tilde{B}_{11} y_{i-1}^1(qt) + \tilde{B}_{12} y_{i-1}^2(qt), \\ y_i^2(t+1) &= J_2 y_i^2(t) + \tilde{B}_{21} y_{i-1}^1(qt) + \tilde{B}_{22} y_{i-1}^2(qt), \end{aligned} \qquad (14_i)$$

$$i = 1,2,\ldots,$$

то ряди (13) є формальним розв'язком системи рівнянь (12).

Беручи до уваги умови теореми 3, можна переконатися, що ряди

$$\begin{aligned} y_0^1(t) &= \sum_{j=1}^{\infty} J_1^{j-1} F^1(t-j), \\ y_0^2(t) &= -\sum_{j=0}^{\infty} J_2^{-(j+1)} F^2(t+j) \end{aligned} \qquad (15_0)$$

рівномірно збігаються при $t \in \mathbb{R}$, задовольняють систему рівнянь (14_0), а також що виконуються оцінки

$$\begin{aligned} |y_0^1(t)| &\le \frac{M^1}{1-(\lambda^* + \delta_5)}, \\ |y_0^2(t)| &\le \frac{M^2(\lambda_{**}^{-1} + \delta_6)}{1-(\lambda_{**}^{-1} + \delta_6)}, \end{aligned} \qquad (16_0)$$

де $M^1 = \sup_t |F^1(t)|$, $M^2 = \sup_t |F^2(t)|$.

Згідно з (16_0) отримуємо оцінку

$$|y_0(t)| \le M' = \left\{ \frac{M^1}{1-(\lambda^* + \delta_5)}, \frac{M^2(\lambda_{**}^{-1} + \delta_6)}{1-(\lambda_{**}^{-1} + \delta_6)} \right\}. \qquad (17_0)$$

З урахуванням (14_0) і (16_0) можна послідовно показати, що ряди

$$y_i^1(t) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} J_1^{j-1} (\tilde{B}_{11} y_{i-1}^1(q(t-j)) + \tilde{B}_{12} y_{i-1}^2(q(t-j))),$$

$$y_i^2(t) = \qquad (15_i)$$

$$= -\sum_{j=0}^{\infty} J_2^{-(j+1)} (\tilde{B}_{21} y_{i-1}^1(q(t+j)) + \tilde{B}_{22} y_{i-1}^2(q(t+j))),$$

$$i = 1,2,\ldots,$$

рівномірно збігаються при $t \in \mathbb{R}$, задовольняють системи рівнянь (14_i), $i = 1,2,\ldots$, а також що виконуються оцінки

$$\begin{aligned} |y_i^1(t)| &\le M'\theta^i, \\ |y_i^2(t)| &\le M'\theta^i, \end{aligned} \quad i = 1,2,\ldots. \qquad (16_i)$$

Звідси випливає, що ряди (13) рівномірно збігаються при $t \in \mathbb{R}$ до деякої неперервної вектор-функції $y(t) = (y^1(t), y^2(t))$, яка є розв'язком системи рівнянь (12) і задовольняє умову

$$|y(t)| \le \frac{M'}{1-\theta}.$$

Теорему 3 доведено.

Висновки

У статті встановлено нові умови існування неперервних розв'язків систем різницевих рівнянь, запропоновано метод побудови таких розв'язків та досліджено структуру їх множини. Основним результатом є теорема 1, у якій доведено існування сім'ї неперервних обмежених при $t \ge 0$ розв'язків, що залежить від $\bar{n} = \sum_{i=1}^{k} n_i$ довільних неперервних 1-періодичних функцій при виконанні певних умов.

Отримані результати доповнюють уже існуючі праці інших математиків і сприятимуть подальшому вивченню неперервних розв'язків більш широких класів таких рівнянь. До того ж цей матеріал у майбутньому буде використано при дослідженні різницевих рівнянь вказаного вигляду, коли $A = A(t), B = B(t)$.

Список літератури

1. *Birkhoff G.D.* General theory of linear difference equations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1911. – **12**. – P. 243–284.
2. *Trjitzinsky W.J.* Analytic theory of linear q-difference equations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1933. – **61**. – P. 1–38.
3. *Пелюх Г.П., Сівак О.А.* Дослідження структури множини неперервних розв'язків систем лінійних функціонально-різницевих рівнянь // Нелінійні коливання. – 2009. – **12**, № 3. – С. 307–335.

4. *Пелюх Г.П., Сівак О.А.* Про структуру множини неперервних розв’язків функціонально-різницевих рівнянь з лінійно перетвореним аргументом // Нелінійні коливання. – 2010. – **13**, № 1. – С. 75–95.
5. *Сівак О.А.* Структура множини неперервних розв’язків систем лінійних функціонально-різницевих рівнянь // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2011. – № 4. – С. 81–87.

References

1. G.D. Birkhoff, “General theory of linear difference equations”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 12, pp. 243–284, 1911.
2. W.J. Trjitzinsky, “Analytic theory of linear q-difference equations”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 61, pp. 1–38, 1933.
3. G.P. Pelyukh and O.A. Sivak, “A study of the structure of the set of continuous solutions to systems of linear functional-difference equations”, *Neliniyni Kolyvannya*, vol. 12, no. 3, pp. 307–335, 2009 (in Ukrainian).
4. G.P. Pelyukh and O.A. Sivak, “On the structure of the set of continuous solutions of functional-difference equations with linearly transformed argument”, *Neliniyni Kolyvannya*, vol. 13, no. 1, pp. 75–95, 2010 (in Ukrainian).
5. O.A. Sivak, “The structure of a set of continuous solutions of systems of linear functional difference equations”, *Naukovi Visti NTUU KPI*, no. 4, pp. 81–87, 2011 (in Ukrainian).

І.В. Бецко

ДОСЛІДЖЕННЯ СТРУКТУРИ МНОЖИНИ НЕПЕРЕРВНИХ РОЗВ’ЯЗКІВ СИСТЕМ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

Проблематика. Розглядається структура множини неперервних розв’язків системи рівнянь

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)x(qt) + F(t) \qquad (1)$$

у низці випадків залежно від припущень відносно матриць A, B, числа q, а також вивчаються їх властивості.

Мета дослідження. Вивчення питань існування неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}$ розв’язків, дослідження структури їх множини, а також розроблення методу їх побудови.

Методика реалізації. Використовуються методи теорії диференціальних і різницевих рівнянь.

Результати. У теоремі 1 доведено існування сім’ї неперервних обмежених при $t \geq 0$ розв’язків, яка залежить від $\bar{n} = \sum_{i=1}^{k} n_i$ довільних неперервних 1-періодичних функцій при виконанні певних умов. Аналогічну теорему доведено для випадку $t \leq 0$ (теорема 2), а також доведено теорему 3 про існування неперервного обмеженого розв’язку неоднорідної системи рівнянь (1).

Висновки. Встановлено нові умови існування неперервних розв’язків систем різницевих рівнянь (1), запропоновано метод побудови таких розв’язків та досліджено структуру їх множини.

Ключові слова: різницеві рівняння; неперервні обмежені розв’язки.

И.В. Бецко

ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ МНОЖЕСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Проблематика. Рассматривается структура множества непрерывных решений системы уравнений

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)x(qt) + F(t) \qquad (1)$$

в ряде случаев в зависимости от предположений относительно матриц A, B, числа q, а также изучаются их свойства.

Цель исследования. Изучение вопросов существования непрерывных ограниченных при $t \in \mathbb{R}$ решений, исследование структуры их множества, а также разработка метода их построения.

Методика реализации. Используются методы теории дифференциальных и разностных уравнений.

Результаты. В теореме 1 доказано существование семьи непрерывных ограниченных при $t \geq 0$ решений, которая зависит от $\bar{n} = \sum_{i=1}^{k} n_i$ произвольных непрерывных 1-периодических функций при выполнении определенных условий. Аналогичная теорема доказана для случая $t \leq 0$ (теорема 2), а также доказана теорема 3 о существовании непрерывного ограниченного решения неоднородной системы уравнений (1).

Выводы. Установлены новые условия существования непрерывных решений систем разностных уравнений (1), предложен метод построения таких решений, и исследована структура их множества.

Ключевые слова: разностные уравнения; непрерывные ограниченные решения.

Рекомендована Радою фізико-математичного факультету НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції 15 червня 2015 року